

Stabilität invertierter Pendel

Michael Hartmann

Kaffeeseminar

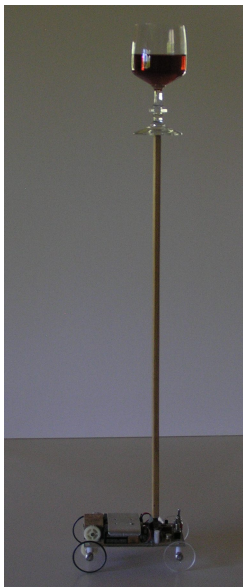
4. November 2016



Überblick

- ① Einleitung
- ② Invertiertes Doppelpendel
- ③ Mathieu-Gleichung
- ④ Beispiele

Invertierte Pendel



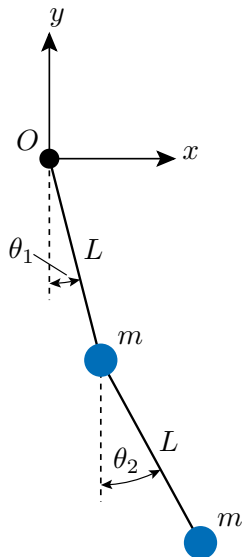
Invertierte Pendel



Invertierte Pendel



Doppelpendel



Koordinaten

$$x_1 = L \sin \theta_1$$

$$y_1 = -L \cos \theta_1$$

$$x_2 = L \sin \theta_1 + L \sin \theta_2$$

$$y_2 = -L \cos \theta_1 - L \cos \theta_2$$

Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

$$V = -mgL (3 + 2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

Linearisieren um $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \pi$

Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \approx \frac{1}{2}mL^2(2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)$$

Potentielle Energie ($\Delta_j \equiv \theta_j - \pi$)

$$V = -mgL(3 + 2\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \approx -mgL\left(\Delta_1^2 + \frac{\Delta_2^2}{2}\right)$$

Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} \approx \frac{1}{2}mL^2(2\dot{\Delta}_1^2 + \dot{\Delta}_2^2 + 2\dot{\Delta}_1\dot{\Delta}_2) + mgL\left(\Delta_1^2 + \frac{\Delta_2^2}{2}\right)$$

Linearisieren um $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \pi$

Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Delta}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Delta_j} = 0$$

Bewegungsgleichungen

$$\frac{L}{g} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\Delta}_1 \\ \ddot{\Delta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix}$$

Eigenfrequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{2}}}}_{\approx 1.8478}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L}} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{2 + \sqrt{2}}}}_{\approx 0.7654}$$

Normalkoordinaten

Kleine Abweichungen $\Delta_j \approx 0$ in Normalkoordinaten

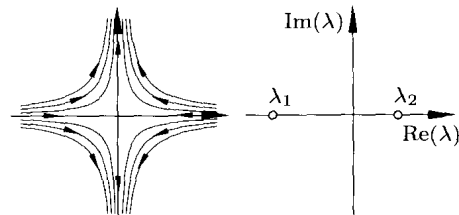
$$\ddot{X}_j - \omega_j^2 X_j = 0, \quad j = 1, 2$$

Als System 1. Ordnung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X_j \\ \dot{X}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_j^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_j \\ \dot{X}_j \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_j$$



Stabilisieren

Aufhängung O oszilliere nun mit Frequenz ω_0 und Amplitude ϵ nach oben und unten

$$\ddot{X}_j - \omega_j^2 \left(1 + \frac{\epsilon \omega_0^2}{g} \cos(\omega_0 t) \right) X_j = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

Reskalieren mit $\tau = \omega_0 t$

$$\frac{d^2 X_j}{d\tau^2} + (\alpha_j + \beta_j \cos \tau) X_j = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

$$\text{mit} \quad \alpha_j = -\omega_j^2 / \omega_0^2, \quad \beta_j = -\omega_j^2 \epsilon / g$$

Stabilisieren

Aufhängung O oszilliere nun mit Frequenz ω_0 und Amplitude ϵ nach oben und unten

$$\ddot{X}_j - \omega_j^2 \left(1 + \frac{\epsilon \omega_0^2}{g} \cos(\omega_0 t) \right) X_j = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

Reskalieren mit $\tau = \omega_0 t$

$$\frac{d^2 X_j}{d\tau^2} + (\alpha_j + \beta_j \cos \tau) X_j = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

$$\text{mit} \quad \alpha_j = -\omega_j^2 / \omega_0^2, \quad \beta_j = -\omega_j^2 \epsilon / g$$

$\Rightarrow N$ ungekoppelte Mathieu-Gleichungen

Mathieu-Gleichung

Mathieu-Gleichung

$$\ddot{y}(t) + (\alpha + \beta \cos t) y(t) = 0$$

Eigenschaften

- linear
- homogen
- 2π -periodisch

Floquet-Theorem

Theorem: Jede Fundamentalmatrix Φ von

$$\dot{y}(t) = \mathcal{L}(t)y(t)$$

mit stetiger ω -periodischer Koeffizientenmatrix \mathcal{L} lässt sich als

$$\Phi(t) = \mathcal{P}(t) \exp(\mathcal{R}t)$$

schreiben, wobei \mathcal{P} ω -periodisch und \mathcal{R} konstant.

Definition: Es gilt $\Phi(t + T) = \Phi(t)\mathcal{B}$ und die Eigenwerte λ_j von \mathcal{B} heißen charakteristische Multiplikatoren.

Floquet-Theorem (2)

Lemma: Sei λ_j ein charakteristischer Multiplikator, dann existiert eine Lösung

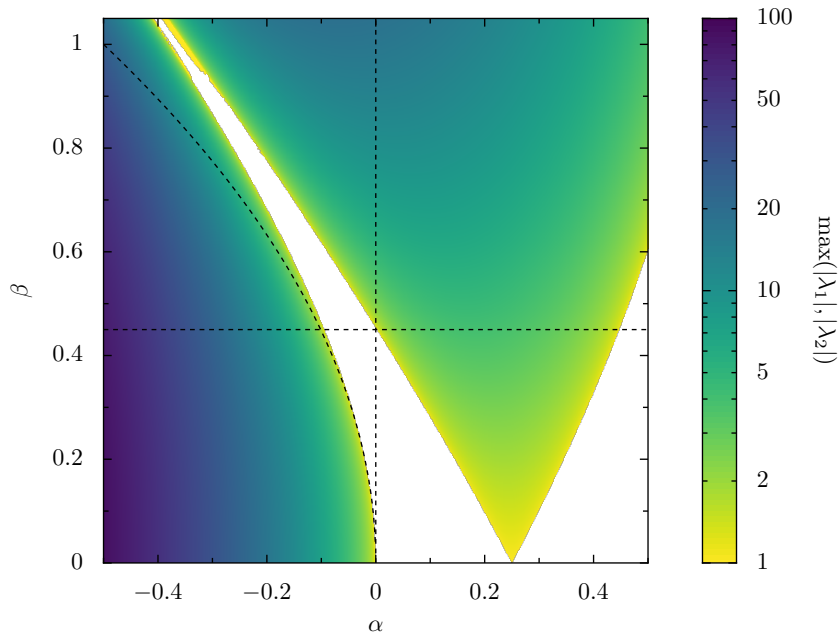
$$y(t + T) = \lambda_j y(t).$$

Stabilität: Falls $|\lambda_j| > 1$, dann divergiert $y(t)$ für $t \rightarrow \infty$.

Numerisch:

- 1 Berechne Propagator $U(t + T, t)$
- 2 Berechne Eigenwerte λ_j von $U(t + T, t)$
- 3 Falls alle Eigenwerte $|\lambda_j| \leq 1 \rightarrow$ Lösung stabil

Stabilität Mathieu-Gleichung

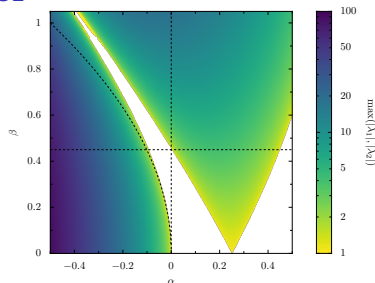


Stabilität invertiertes N-Pendel

Idee: Wähle ϵ , ω_0 so, dass alle Punkte

$$(\alpha, \beta) = (-\omega_j^2/\omega_0^2, \omega_j^2\epsilon/g)$$

im stabilen Bereich liegen.



Hochfrequenz-Limes: $\omega_0^2 \gg \omega_{\max}^2$

$$\alpha = -\frac{\omega_j^2}{\omega_0^2} > -\frac{\beta^2}{2} = -\frac{\omega_j^4 \epsilon^2}{2g^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}g}{\omega_0 \omega_j} < \epsilon$$

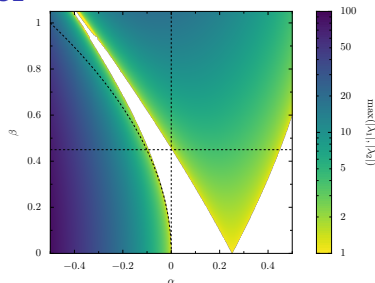
$$\beta = \frac{\omega_j^2 \epsilon}{g} < 0.45 \Rightarrow \epsilon < 0.45 \frac{g}{\omega_j^2}$$

Stabilität invertiertes N-Pendel

Idee: Wähle ϵ , ω_0 so, dass alle Punkte

$$(\alpha, \beta) = (-\omega_j^2/\omega_0^2, \omega_j^2\epsilon/g)$$

im stabilen Bereich liegen.



Hochfrequenz-Limes: $\omega_0^2 \gg \omega_{\max}^2$

$$\alpha = -\frac{\omega_j^2}{\omega_0^2} > -\frac{\beta^2}{2} = -\frac{\omega_j^4 \epsilon^2}{2g^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}g}{\omega_0 \omega_j} < \epsilon$$

$$\beta = \frac{\omega_j^2 \epsilon}{g} < 0.45 \Rightarrow \epsilon < 0.45 \frac{g}{\omega_j^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}g}{\omega_0 \omega_{\min}} < \epsilon < 0.45 \frac{g}{\omega_{\max}^2}$$

invertiertes Doppelpendel

Stabilitätsbedingung

- für $m_1 = m_2 = m$:

$$\sqrt{\frac{g}{L}} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\omega_0} < \frac{\epsilon}{L} < 0.45 \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

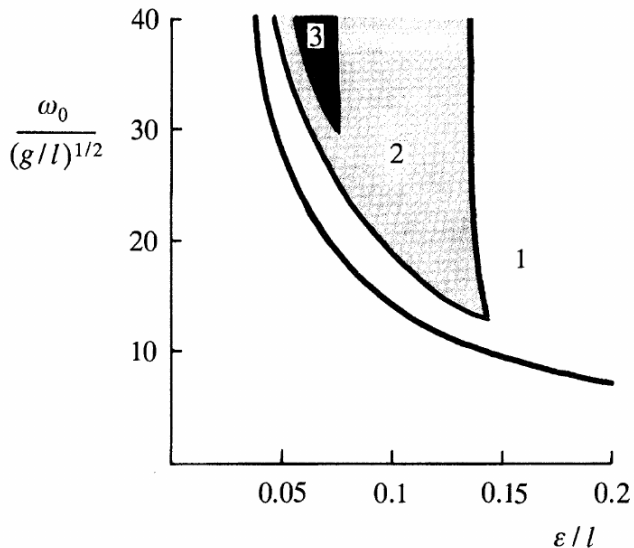
- für beliebige Massenverhältnisse (m_1 mit O verbunden):

$$\sqrt{\frac{g}{L}} \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{\mu}}}{\omega_0} < \frac{\epsilon}{L} < 0.45(1 - \sqrt{\mu})$$

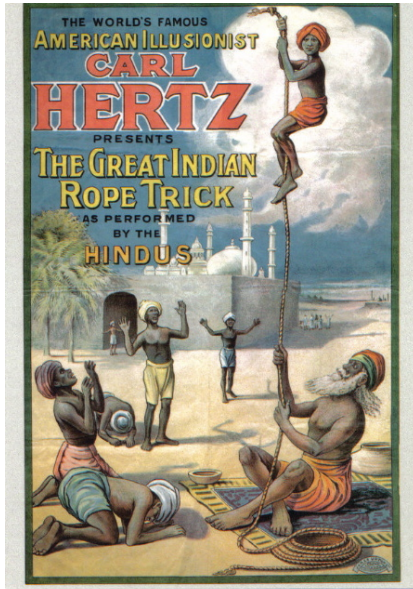
mit

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

invertiertes N -Pendel



Indischer Seiltrick



Indischer Seiltrick

Eigenfrequenzen eines N -Pendels

$$\omega_j = \sqrt{\xi_j \frac{g}{L}}, \quad j = 1, \dots, N$$

mit ξ_j : j -te Nullstelle des Laguerre-Polynoms $L_N(x)$

Asymptotische Entwicklung von ξ_j für $N \gg 1$

$$\xi_j \simeq \chi_j^2/4N, \quad \chi_1 \approx 2.4, \quad \chi_N \simeq (N - 1/4) \pi$$

mit χ_j : j -te Nullstelle der Bessel Funktion $J_0(x)$

Größte/kleinste Eigenfrequenz

$$\omega_{\min} \approx 1.2 \sqrt{\frac{g}{NL}}, \quad \omega_{\max} \approx \frac{\pi}{2} (N - 1/4) \sqrt{\frac{g}{NL}}$$

Indischer Seiltrick

GröÙte/kleinste Eigenfrequenz

$$\omega_{\min} \approx 1.2 \sqrt{\frac{g}{NL}}, \quad \omega_{\max} \approx \frac{\pi}{2} (N - 1/4) \sqrt{\frac{g}{NL}}$$

Stabilitätsbedingung

$$\frac{1.18}{\omega_0} \sqrt{\frac{g}{NL}} \lesssim \frac{\epsilon}{NL} \lesssim \frac{0.182}{(N - 1/4)^2}$$

$$\frac{\sqrt{gNL}}{\omega_0} \lesssim \epsilon \lesssim 0.154 \frac{L}{N}$$

Indischer Seiltrick

Größte/kleinste Eigenfrequenz

$$\omega_{\min} \approx 1.2 \sqrt{\frac{g}{NL}}, \quad \omega_{\max} \approx \frac{\pi}{2} (N - 1/4) \sqrt{\frac{g}{NL}}$$

Stabilitätsbedingung

$$\frac{1.18}{\omega_0} \sqrt{\frac{g}{NL}} \lesssim \frac{\epsilon}{NL} \lesssim \frac{0.182}{(N - 1/4)^2}$$

$$\frac{\sqrt{gNL}}{\omega_0} \lesssim \epsilon \lesssim 0.154 \frac{L}{N}$$

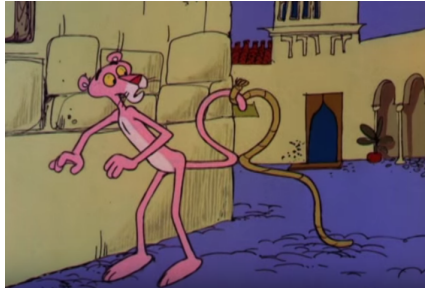
⇒ für $N \gg 1$ immer schwieriger zu erfüllen

Beispiel aus der echten Welt



Abbildung: Steve Mould, Upside down pendulum, youtube

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit



Quellen

- D. J. Acheson, **A pendulum theorem**, The Royal Society (1993)
- Fermat's Library: A Pendulum theorem